



TITLE:

物質線を用いた乱流混合過程を記述する簡単なモデル (乱流による輸送, 拡散, 混合の数理)

AUTHOR(S):

藤, 定義; 小笠原, 健; 河野, 敏明

---

CITATION:

藤, 定義 ...[et al]. 物質線を用いた乱流混合過程を記述する簡単なモデル (乱流による輸送, 拡散, 混合の数理). 数理解析研究所講究録 2003, 1339: 44-53

ISSUE DATE:

2003-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/43424>

RIGHT:

# 物質線を用いた乱流混合過程を記述する簡単なモデル

藤 定義、小笠原 健 (京大院理)、河野 敏明 (京大院情報)

2次元自由対流乱流の速度場によって移流される物質線の伸長を追跡し、その物質線を境界とする2種の一様なパッシブスカラーの混合過程を記述することを試みた。長さスケール  $l_n = 2\pi/2^n$  において、単位正方領域が境界線を含むときその領域内で2種のスカラーが混合されたと定義する。また、混合された単位正方領域の数を  $N_n(t)$  と表し、被覆領域の大きさと呼ぶ。このとき、長さスケール  $l_n$  で粗視可した場に対して、非混合状態から完全混合状態への緩和過程が定義できる。慣性領域に相当する複数の長さスケールに対して、その被覆領域の大きさ  $N_n(t)$  の時間発展が次のように時間シフトとスケール変換を用いて統一的に記述出来ることを見出した： $N_n(t) = 2^{\beta(n-n_0)+2n_0} y(t + \gamma(n-n_0))$ 。また関数  $y(\tau)$  が増幅率  $A$  をパラメータにもつロジスティック方程式  $dy/d\tau = Ay(1-y)$  に従うことを示した。

## 1 はじめに

乱流による物質の混合は、地球スケールの現象から日常生活に至るまで様々な場で重要な役割を果たしている。また、その理解は現象の解明のみならず、混合や燃焼の効率を高めるなど実用的な立場においても重要である。

分子運動による拡散過程では、ランダムウォークのような物理的な描像が与えられおり、揺動散逸定理として熱的な揺らぎと輸送係数の関係がつけられている。従って、拡散方程式に代表されるマクロな記述も単なる現象論ではなく物理的な根拠をもつ表現となっている。

一方、乱流拡散や混合過程は、乱流場の乱れの統計的な性質が解明されていないために、基礎的な立場からは理解されたとはいえない状況にある。特に、現実的な状況では熱的な効果や、反応、燃焼と言ったそれ自身が複雑である現象と同時に起きる事が多いので、問題設定が難しい。更に、乱流場がスケール不変な階層性を持つために、局所的な輸送現象としての扱いが難しいこともその原因のひとつとなっている。

本報告では、問題設定を出来るだけ簡単にして乱流混合過程を定義することを試み、その範囲内で記述の方法を提案することを目的とする。そこで、乱流速度場によるパッシブスカラー場のラグランジュ的な移流が混合過程で果たす役割を明確にするために、分子運動による拡散効果は無視することにする。更に、2種類の一様なスカラー場の境界の複雑化過程として乱流混合過程を記述することを試みる。以下、簡単のために2次元ブシネスク近似方程式によって支配される2次元自由対流(2DFC)乱流[1, 2]の速度場に移流されるパッシブスカラーの混合を扱う。この場合、境界は物質線となるので、扱いは比較的容易である。2DFC乱流の詳細については、付録にまとめた。

## 2 数値計算方法

2次元自由対流乱流場を統計的に定常な状態に維持するために、温度場に対して低波数側に外力(熱源)を用いて熱揺らぎを加え、速度場に対しては低波数側にドラッグを加えて逆輸送されるエネルギーを取り除いた。時間発展は4次のルンゲ=クッタ法を、また空間方向には位相シフトを使った擬スペクトル法をそれぞれ用いた。数値計算のパラメータを表1にまとめた。本報告では、ニュートン粘性の場合を2種(NV09& NV10)、超粘性を1種(HV09)と、3つの

異なる場合を扱い比較した。超粘性は、慣性領域を広くすることと共に、物質線の伸長が粘性領域のダイナミックスに支配されるので、乱流混合における粘性領域のダイナミックスの影響を調べるために取り扱うことにした。

	モード数 $N^2$	粘性	$\nu(=\kappa)$	$\varepsilon_\theta$	$\eta_\theta$	$\tau_\theta$	$T_L$
NV09	$512^2$	$\Delta$	$3 \times 10^{-4}$	$6.61 \times 10^{-3}$	$1.18 \times 10^{-2}$	0.462	8.24
NV10	$1024^2$	$\Delta$	$1 \times 10^{-4}$	$6.92 \times 10^{-3}$	$5.89 \times 10^{-3}$	0.347	8.02
HV09	$512^2$	$\Delta^8$	$1 \times 10^{-34}$	$7.39 \times 10^{-3}$	$7.04 \times 10^{-3}$	0.368	7.72

表 1: 数値計算及び数値パラメター.  $T_L$  は系の特性時間で  $2\pi/(\langle |\mathbf{u}|^2 \rangle)^{1/2}$  と定義する. ただし、 $\Delta$  と  $\langle \rangle$  はラプラシアン演算子と空間平均の長時間平均をそれぞれ表す。

以下、2種類の一様なスカラー場の境界が物質線となる場合を扱うので、物質線を追跡する必要がある。物質線の発展は、物質線を線分 (セグメント、 $\xi_n(t)$ ) の和で記述し、その線分の両端の点をラグランジュ的に追跡することで数値的に求める。セグメントの長さがメッシュ幅  $\Delta x$  の 1.5 より長くなると、セグメントを分割する。各セグメント端の位置での速度場は、 $4 \times 4$  の格子点上の速度を用いたラグランジュ補間により与えた。

### 3 物質線の伸長

2種類の一様なパッシブスカラーの混合を考える。特に、乱流速度場の混合過程への寄与を理解するために、分子拡散による効果が無視できる理想的な状況を考える。この場合、スカラーがラグランジュ的な保存量であるので、物質線である境界は乱流速度場が引き起こす伸長と折り畳みによって複雑化する。従って、混合は粗視化したときに始めて定義できる。ただし、その定義は粗視化の方法に依存することに注意して欲しい。物質線を用いた乱流混合の定義を説明する前に、物質線の平均的な伸長を定量的に評価する。木田と後藤 [3] は、3次元ナビエ=ストークス乱流において物質線の伸長が指数関数的であり、伸長率が散逸領域の時間スケールで規格化出来ることを明らかにした。

	総標本数	標本数/run	各 run の計算時間	総計算時間	$T_L$
NV09	4	1	$1.33T_L$	$5.3T_L$	8.24
NV10	6	3	$0.87T_L$	$1.8T_L$	8.02
HV09	12	3	$0.65T_L$	$2.6T_L$	7.72

表 2: 各ケースの計算時間。各 run の時間発展の長さは、指数関数的に伸長する物質線を記録するのに必要なメモリーの容量が計算機の上限を越えないように決めた。

2次元自由対流乱流においても物質線の伸長に同様の性質があることを確かめた。図 1 と図 2 に伸長率  $\sigma = \ln L(t)/t$  のアンサンブル平均の時間発展を描いた。ただし、 $L(t)$  は、物質線の総延長である。NV09、NV10、HV09 のそれぞれの場合に対して標本の数は 4、6、12 である。また、系の特性時間  $T_L$  を、 $2\pi/(\langle |\mathbf{u}|^2 \rangle)^{1/2}$  と定義するとき、標本の計算時間はそれぞれ  $T_L$  の 1.33 倍、0.87 倍、0.65 倍である。

コルモゴロフの時間スケール  $\tau_\theta$  で規格化された伸長率は、二つの異なる粘性係数の NV09 と NV10 の場合に対し、同じ値に収束する。一方、超粘性の場合にも物質線は指数関数的に伸

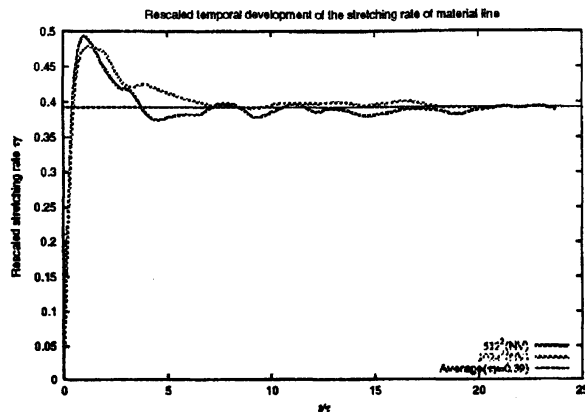


図 1: ニュートン粘性の場合. 時間はコルモゴロフ時間  $\tau_0$  で規格化してある. NV09 と NV10 の二つの場合が同じ伸長率に収束している.

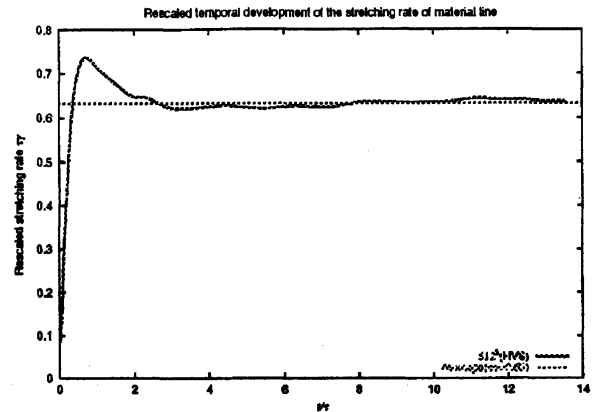


図 2: 超粘性の場合. 時間はコルモゴロフ時間  $\tau_0$  で規格化してある. ニュートン粘性の場合と異なる値に収束する.

びるが、その伸長率はコルモゴロフ時間で規格化してもニュートン粘性の場合と異なる。これは、物質線の伸長が粘性スケールの速度場によって決まることを示唆している。ニュートン粘性と超粘性では、粘性スケールのダイナミクスが異なるのでコルモゴロフ時間で企画化しても伸長率の値が異なると思われる。

## 4 乱流混合領域の定義

我々は、乱流速度場による一様な 2 種のパッシブスカラーの混合過程に注目している。そこで、分子運動による拡散や混合を無視出来ると仮定しよう。この場合、スカラーはラグランジュの意味で保存量であるから、混合は 2 種のスカラーの境界が複雑化することに対応する。小さなスケールで見れば常にこれらのスカラーは分離した状態にあるから、混合を定義するためには某かの粗視可が必要である。

物質線の複雑化に対応する混合過程を記述するために、フラクタルを用いる事が多い。これは、乱流速度場が慣性小領域においてフラクタル的な性質を持つためである。これまでの実験や数値計算あるいは理論的な取り扱いでは、パッシブスカラーの揺らぎに持続的な注入があり、また分子運動による拡散効果があるので準平衡状態にある等値面や等値線 (レベルセット) のフラクタル性を扱う場合が多かった [4, 5]。従って、本報告で扱う 2 種のパッシブスカラーの境界の複雑化とは異なる状況を取り扱っていることに注意して欲しい。更に、準平衡状態においても、レベルセットは単純なフラクタルではなく、スケールに依存しているという報告もある [6]。

今、我々が興味を持つのは、2 種の一様なパッシブスカラーが完全に分離した状態から、完全に混ざった状態に至る過程を記述することである。従って、仮に物質線のフラクタル次元が決まったとしても、初期の 1 次元から完全に混ざった状態の 2 次元まで時間発展するはずであり、フラクタル次元の時間発展を記述する某かの動力学や法則を求めることが必要である。物質線のフラクタル次元はスケールに依存する可能性があるので、求めるべき動力学はスケールと時間の両方に依存するものでなければならないであろう。

そこで、ここではフラクタル次元を直接扱うことは止めて、スケールに依存した混合領域

を定義し、その領域の時間発展を直接扱うことにする。自明であるが、このスケール依存した混合領域の情報からフラクタル次元を求めることは、もし存在するなら容易である。



図 3: NV09 : 時刻  $t = 6$  の物質線で定義された混合領域  $N_n(t)$ ; (a)  $n = 7$ , (b)  $n = 6$ , (c)  $n = 5$

さて、混合された領域を定義しよう：長さ  $l_n = 2\pi/2^n$  の基本正方領域に境界（物質線）が含まれるとき、この正方領域を混合された領域と呼ぶ。ただし、 $2\pi$  は考えている系のシステムサイズである。従って、長さが  $l_n$  の正方領域は、 $2^{2n}$  個あることになる。長さスケール  $n$  の混合領域の大きさを混合された単位正方領域の数  $N_n(t)$  で定義する。これを被覆領域の大きさと呼ぶことにする。被覆領域の大きさは、物質線のフラクタル次元が定義できるとすると、フラクタル次元と以下のような関係がある。

$$N_n(t) \sim l_n^{D(t)}, \quad N_n(t) \sim l_n^{D(t,n)}. \quad (1)$$

ただし、 $D(t)$  と  $D(t,n)$  はそれぞれスケールに依らない場合と依る場合のフラクタル次元を表す。

図 3 に、NV09 の場合の時刻  $t = 6$  における物質線に対して長さスケール  $l_5, l_6, l_7$  での混合領域を示した。これらの図が示すように、物質線が与えられても、粗視化するスケールによって、混合領域の面積が異なることが分かる。このように、物質線を使っても、粗視化が含まれる限り、混合領域の定義は長さスケールに依存し、更に時間発展を考慮しなければならない。今、境界線は初期  $t_0$  に長さ  $2\pi$  の直線と置いているので、長さスケール  $n$  の被覆領域の大きさ  $N_n(t_0)$  は、 $2^n$  である。また、完全に混ざった場合、 $N_n(\infty) = 2^{2n}$  となる。ここでは、物質線を含む基本正方領域は等しい重みで混合領域と定義した。しかし、混合の程度は混合領域毎に異なる<sup>1</sup>。従って、混合領域の定義に混合の程度を加味する重みつき混合を定義することも可能であるが、本報告では、簡単のため重みを 1 とする最も単純で粗い定義を用いた。

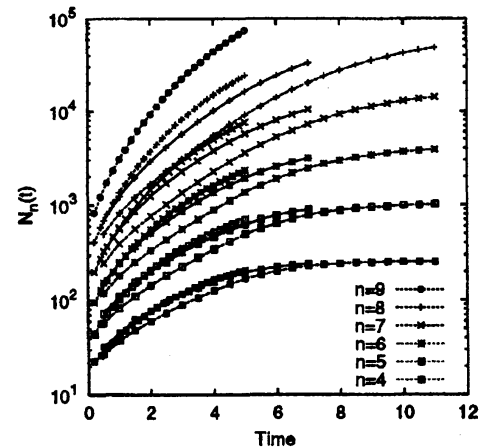


図 4: NV09, NV10, HV10 の 3 つの場合の被覆領域の大きさ  $N_n(t)$  の時間発展。

<sup>1</sup>物質線を被うのに必要な基本正方領域の個数を最小とする最適の配置を考える必要がある。ここでは簡単のため格子点を頂点とする正方形とそれを縦横に  $l_n/2$  だけずらした場合を比較し、最小の個数になる場合を選んだ。この意味では最適の正方領域の数の上限を与えている。

図4に、NV09, NV10, HV09の3つの場合の被覆領域の大きさ  $N_n(t)$  の時間発展を描いた。表2にまとめたように、各場合の標本の計算時間はそれぞれ、5, 7, 11である。この計算時間は、物質線を保存するのに必要な計算機上の記憶容量の上限と関係ある。粘性が小さい程伸長率が大きいため、短時間で記憶容量の上限に達する。一方、計算領域全体を物質線が埋め尽くすのに必要な時間スケールは、粘性スケールとは異なるので、物質線が伸びることが大きなスケールでの乱流混合の促進に直接繋がるものではないことに注意して欲しい。従って、標本を得るのに要した計算時間は飽和するのに必要な時間ではない。十分飽和した状態まで物質線を追跡することは、今後の課題である。

以下では、異なる長さスケールで定義された混合領域の間に適当な変換が存在し、混合領域の時間発展がロジスティック方程式で記述される緩和過程として記述できることを示す。

## 5 規格化と時間シフト

前章で示したように、異なる長さスケールの混合領域は時間と長さスケールに依存するフラクタル次元によって記述することができるが、これは形式的に自由度を増やして見かけ状の表現を単純化しているに過ぎない。本報告では、フラクタル次元ではなく、被覆領域の大きさ  $N_n(t)$  の時間発展を直接扱うことにする。図4に示したように、長さスケールの大きなもの程、被覆領域の大きさは早く飽和する。一見、異なるスケール間には簡単な関係が無いように思えるが、以下のように定義された長さスケールに依存する規格化と時間方向のシフトを行うと、異なるスケールの被覆領域の大きさの時間発展が重なることが示せる。

$$N_n(t) = N_0 2^{\beta(n-n_0)} y(t + \gamma(n-n_0)), \quad N_0 = 2^{n_0}. \quad (2)$$

ただし、スケーリング指数  $\beta$  とシフト時間  $\gamma$  は、フィッティングパラメータであり、異なるスケールの被覆領域の大きさ  $N_n(t)$  の時間発展が重なるように決めるものである。スケーリング指数  $\beta$  は2ではないので、この規格化では特定のスケール  $n_0$  のみだけ  $t = \infty$  で1に漸近する。従って、この変換は飽和に至る前までについてのみ成り立つものであることに注意して欲しい。

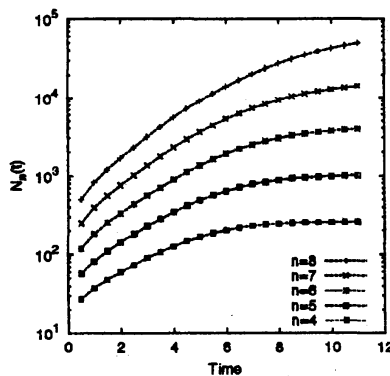


図5: NV09での  $N_n(t)$  の時間発展.  $n = 4, 5, 6, 7, 8$

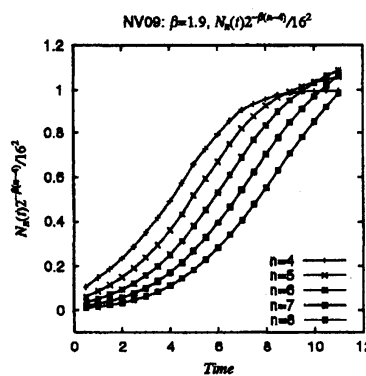


図6: 被覆領域の大きさを、 $2^{\beta(n-4)+8}$  で規格化した。  $\beta = 1.9$

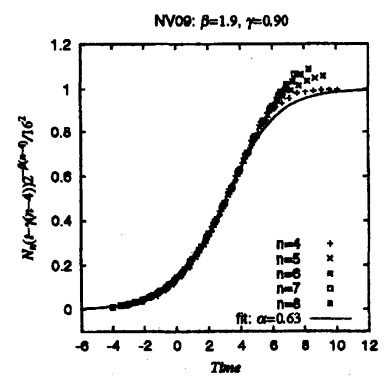


図7: 図6を更に時間方向に  $\gamma(4-n)$  シフトした。  $\gamma = 0.90$ .

図5に、NV09の場合の被覆領域の大きさ  $N_n(t)$  の時間発展を示した。スケールが大きい程早く飽和している。式(2)に従いスケーリング指数  $\beta = 1.90$  で規格化し(図6)、シフト時間

$\gamma = 0.90$  で時間シフトを行った結果を図7に示した。規格化された被覆領域の大きさが0.85程度まで、一致することが分かる。

スケーリング指数  $\beta$  とシフト時間  $\gamma$  は、それぞれの値を変えて  $N_n(t)$  が重なる最適のものを選んだ。図8にNV09の場合の重なり具合のスケーリング指数  $\beta$  依存性を示した。他の粘性の場合も、式(2)に従えば被覆領域の大きさ  $N_n(t)$  の時間発展を重ねる事ができる。

図9にNV09, NV10, HV09の3つの場合の結果を示す。3つの場合に対し、スケーリング指数  $\beta$  の最適値は全て同じで1.90, 最適のシフト時間  $\gamma$  は、それぞれ0.90, 0.67, 0.47とした。

スケーリング指数  $\beta$  は、フラクタル次元に似ているが、スケール毎に異なる時刻で比較しているの、通常のフラクタル次元ではない。また、通常のフラクタル次元ならば、時間の関数であるはずであるが、スケーリング指数  $\beta$  は初期から飽和直前まで一定の値をとる。この一定値が自由対流乱流に普遍的なものかどうかは分からない。この指数が2ではないため、基準のスケール  $n_0$  を除いて飽和値が1ではない。このことは、指数  $\beta$  が乱流混合過程全般に一定では無いことを推測させる。

シフト時間  $\gamma$  は、ここでは定数である。ただし、慣性領域が広くないのでこの結果は必ずしも確定したものではない。もし十分広い慣性領域に対して  $\gamma$  が定数であるならば、粘性が無限小の極限においてはシフト時間が  $\gamma n \rightarrow \infty$  となる。これは、全てのスケールで完全に混合するまでには無限の時間がかかること意味する。慣性領域での時間スケール(渦回転時間)は  $l_n^{2/5}$  であり、エントロピーカスケードにおいては有限時間で無限小スケールまで達することが示唆されるのとは対象的である。この時間シフトの意味は不明であるが、大きなスケールから小さなスケールへ某かの情報が伝わっていると考えられる。

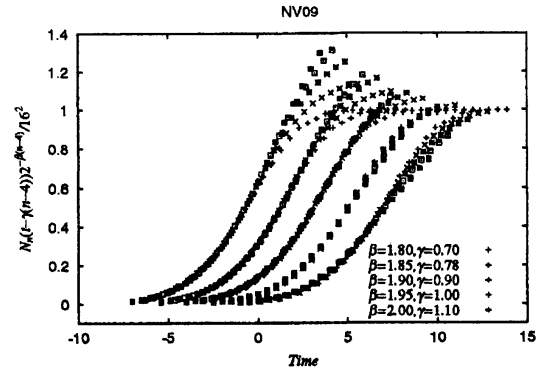


図8: NV09: 重なり方の  $\beta$  依存性を示した。左から右に、 $\beta = 1.80, 1.85, 1.90, 1.95, 2.00$  である。 $\gamma$  はそれぞれの  $\beta$  に対する最適値を用いた。

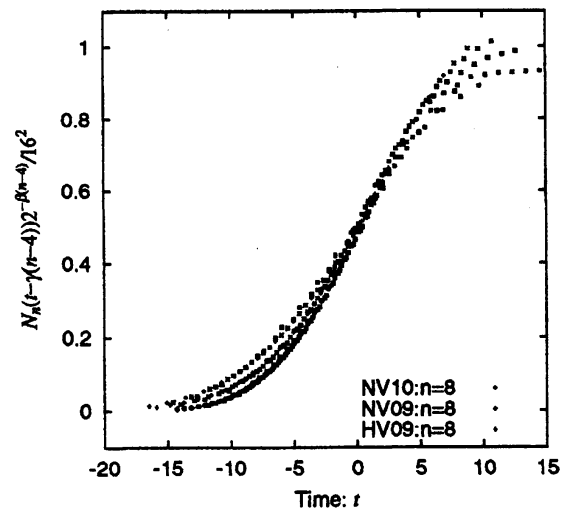


図9: NV09, NV10, HV09の場合について、式(2)に基づき変換した。 $\beta = 1.90$  に対し、シフト時間の最適値として  $\gamma = 0.90, 0.67, 0.47$  をそれぞれ用いた。

## 6 緩和過程の記述

前章では、被覆領域の大きさ  $N_n(t)$  の時間発展が、式(2)で定義される規格化と時間シフトで関数  $y(\tau)$  に重なることを示した。この章では、 $y(\tau)$  がロジスティック方程式に従うことを数値的に示す。

ロジスティック方程式は以下のような1パラメーターの常微分方程式である。

$$\frac{dy}{d\tau} = Ay(1-y). \quad (3)$$

小さな  $y$  の値では線形となり、 $A$  は線形増幅率に対応する。また、 $y$  の値が大きくなると非線形効果が効き始め、増幅は抑制される。任意の初期条件から出発しても、無限時間後には1に収束する。一般解は、初期値を  $y(\tau_0; A) = 1/(1 + C)$  とすると以下のように書ける。

$$y(\tau; A) = \frac{1}{1 + C \exp[-A(\tau - \tau_0)]}. \quad (4)$$

初期条件が1より小さい場合、単調に1に緩和する。唯一のパラメーターは  $A$  であるが、これは時間の逆数の次元をもち、特徴的時間スケールを決める。図9に示した3つの関数  $y$  を解(4)を用いてフィットするために、パラメーター  $A$  と初期条件  $C$  を最小自乗法を用いて決めた。

図10に結果をまとめた。3つの場合とも初期から飽和が顕著になる  $y(\tau) \sim 0.85$  までは、良く近似できることが見てとれる。ただし、超粘性を用いた場合初期の発展で少し下側にずれている。このことから、時間スケール  $1/A$  を用いれば、異なる粘性値や粘性機構に対して乱流混合による飽和過程が1つの関数で記述できることがわかる。伸長率はコルモゴロフ時間  $\tau_\theta$  で規格化出来るが、異なる粘性機構(超粘性)に対してはこの規格化が普遍ではないことと対照的である。実際、図11にコルモゴロフ時間  $\tau_\theta$  で時間を規格化した場合を、図12に増幅率  $A$  で時間を規格化した場合をそれぞれ描いた。増幅率  $A$  での時間の規格化は粘性スケールのダイナミクスによらない、普遍的な混合機構が存在すること示唆している。

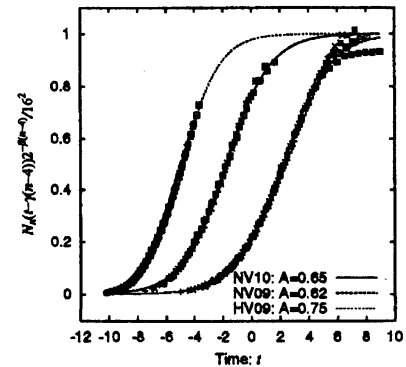


図10: 規格化、時間シフトをして重ねた被覆領域の大きさ  $N_n(\tau)$  の時間発展を解(4)でフィットした。ただし、それぞれ時間座標を適当にずらしている。

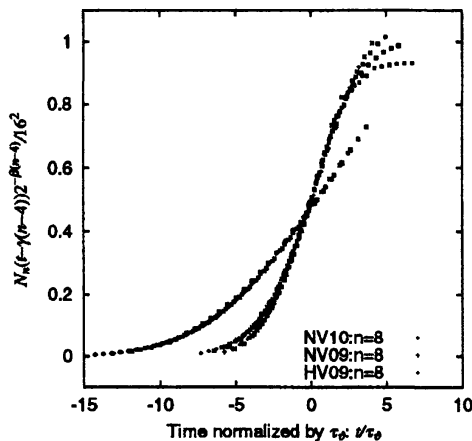


図11: 図9の3つの場合の時間をコルモゴロフ時間  $\tau_\theta$  で規格化。超粘性の場合(HV09)に特にずれている。

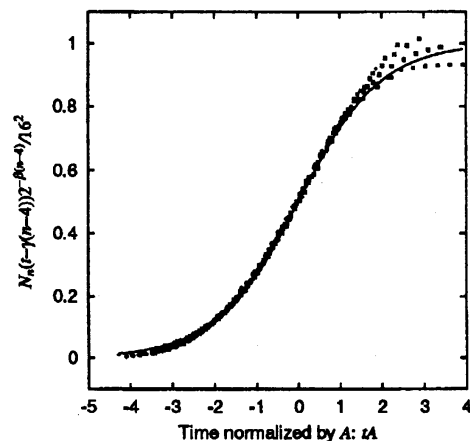


図12: 図9の3つの場合の時間を増幅率  $A$  で規格化。

図3に物質線のスナップショットが描かれている。折り畳みや伸長が強い領域は、キノコ状をしている。これは、2次元自由対流乱流の特徴で、エントロピーカスケードの素過程ではプリュー形成を通して、温度差(ポテンシャルエネルギー)を流体運動に(運動エネルギー)へ変換する[7]。このプリューム形成がキノコ状の構造として可視化されている。カスケード過程はスケール普遍な過程であるので、キノコのサイズは小さいものから大きいものまで存在



している。このことから、カスケード過程と増幅率  $A$  との間に何らかの関係があると推測できる。

## 7 まとめと結論

本報告では、2次元ブシネスク近似方程式に従う定常自由対流乱流の速度場によって平均的に伸長される物質線を用いて、分子運動による拡散効果を見捨てる2種類の一様なパッシブスカラーの乱流混合過程を取り扱った。

長さスケール  $l_n$  に対して、一辺の長さ  $l_n$  の基本正方領域に物質線が含まれる場合にその領域が混合されたと定義する。含まれる物質線の長さや混合の程度は異なるが、ここではこの重みを見捨てる最も簡単な混合領域の定義を用いた。混合された基本正方領域の総数を被覆領域の大きさと呼び  $N_n(t)$  と表す。混合領域の大きさの時間変化は、この被覆領域の大きさの時間発展を用いて記述した。長さスケールが異なると被覆領域の大きさの時間発展は異なる。しかし、変換 (2) を用いると1つの関数で表現できことを粘性の異なる3つの場合に確かめた。この関数の時間発展は、ロジスティック方程式に従う。更に、増幅率  $A$  を用いて時間を規格化すると異なる粘性の乱流混合過程が統一的に理解できることを示した。この乱流混合の特性時間  $1/A$  は、粘性の特徴的時間スケール (コルモゴロフ時間  $\tau_\theta$ ) とは異なっている。物質線の伸長が粘性スケールで決まるが、乱流混合の特徴的な時間スケール  $1/A$  はこれとは異なり慣性領域の時間スケールであると考えられる。

乱流混合の定義やその時間発展を記述することは、まだ曖昧な点があり確立されていない。本報告では、分子運動による拡散効果を見捨てる物質線の発展に着目し、乱流混合過程を記述する事を試みた。分離した状態から完全に混ざった状態への単純な緩和過程に対しては、非常に簡単な記述の可能性を示唆する結果を得た。ただし、慣性領域が十分広くはないので、ここで得た結果を十分発達した乱流へ外挿するためには更に詳細な研究が必要である。また、スケール指数  $\beta$  を用いた規格化や時間シフトの物理的な意味についても検討が必要である。ここで得た結果は、3次元ナビエ=ストークス乱流にも適応出来ると考えられるが、それについても今後の課題である。

## A 2次元自由熱対流乱流 (2DFC)

アクティブスカラー乱流として次の2次元ブシネスク近似方程式系を考える [1]:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \alpha g T \mathbf{e}_y, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa\Delta T. \quad (\text{A.2})$$

速度場、温度場、圧力場をそれぞれ  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $T(\mathbf{x}, t)$ ,  $p(\mathbf{x}, t)$  とした。  $\nu, \kappa$  はそれぞれ動粘性係数、熱拡散係数である。  $\mathbf{e}_y$  を  $y$  軸方向の単位ベクトル、  $g$  を重力加速度とする。高レイリー数での熱対流乱流はハード乱流と呼ばれるが、この2DFC系はハード乱流の中央領域のモデルの2次元版であり、平均温度勾配はない。従って乱流を維持するために温度場へ温度揺らぎを人為的に注入することが必要である。速度場は浮力項を通してポテンシャルエネルギーが運動エネルギーに変換されることで励起される。また、この系はバロクリニックなので渦度は保存されないことに注意して欲しい。

2DFC 系では二乗温度揺らぎ

$$S = \frac{1}{2} \int T^2 dx \quad (\text{A.3})$$

が保存量であり<sup>2</sup>、この量を便宜的にエントロピーと呼ぶことにする。エントロピーの低波数側から高波数側へのカスケードを仮定すると、エントロピー散逸率  $\epsilon_\theta$  と浮力項の係数  $\alpha g$  を用いて次元解析することにより、慣性領域におけるエネルギースペクトル  $E(k)$  とエントロピースペクトル  $S(k)$  は以下のように決まる [8]:

$$E(k) = C_E \epsilon_\theta^{2/5} (\alpha g)^{4/5} k^{-11/5}, \quad (\text{A.4})$$

$$S(k) = C_S \epsilon_\theta^{4/5} (\alpha g)^{-2/5} k^{-7/5}. \quad (\text{A.5})$$

ここで  $C_E, C_S$  は普遍定数と考えられる。

エントロピー散逸率は次式で定義される:

$$\epsilon_\theta = \langle \epsilon_\theta(\mathbf{x}, t) \rangle = \kappa \langle \nabla T \cdot \nabla T \rangle. \quad (\text{A.6})$$

これらは3次元 Navier-Stokes 乱流における Kolmogorov のカスケード理論 (K41) に対応するものであり、Bolgiano-Obukhov スケーリングと呼ばれる。図 A.1 に、ニュートン粘性の場合 (NV09, NV10) と超粘性の場合 (HV09) に、エントロピーとエネルギースペクトルをそれぞれ示した。Bolgiano-Obukhov スケーリングが良く成り立っている慣性領域が存在することが見て取れる。ただし、慣性領域は高々 1 オクターブ程度でありまだ十分ではない。

散逸領域でのスケールとして、コルモゴロフスケールに対応する長さや時間のスケールが次のように定義できる。

$$\eta_\theta = (\kappa^5 / \epsilon_\theta (\alpha g)^2)^{1/8}, \quad (\text{A.7})$$

$$\tau_\theta = (\kappa / \epsilon_\theta (\alpha g)^2)^{1/4}. \quad (\text{A.8})$$

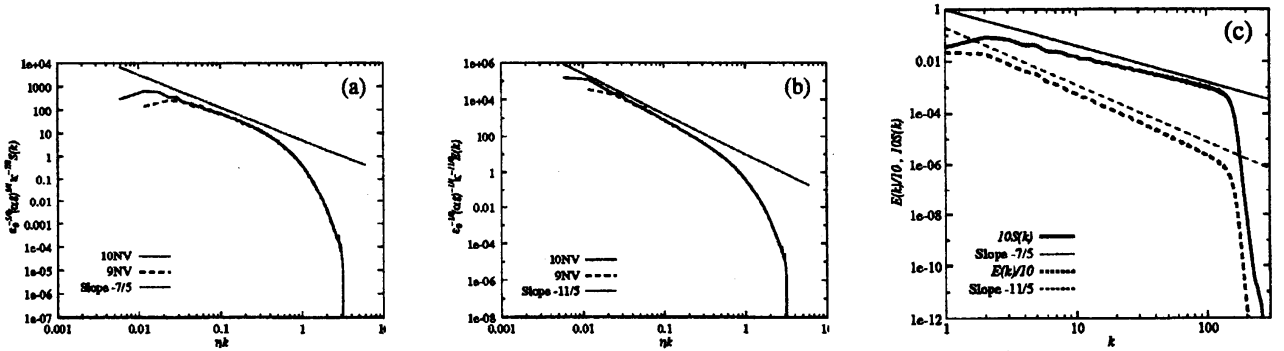


図 A.1: ニュートン粘性を用いた NV09 と NV10 の場合の Bolgiano-Obkov スケーリングで規格化されたスペクトル: (a) エントロピースペクトル  $S(k)$ , (b) エネルギースペクトル  $E(k)$ ; (c) 超粘性を用いた場合のスペクトル。

<sup>2</sup>正確には  $T$  の任意関数は保存する。

## 参考文献

- [1] S. Toh and E. Suzuki : *Phys. Rev. Lett.*, **73**, (1994) p.1501.bb
- [2] S. Toh and T. Matsumoto: in *IUTAM Symposium on Geometry and Statistics of Turbulence* edited by T.Kambe *et al.* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001) p.279 ; *Phys. Fluids* 誌に投稿中
- [3] S. Kida and S. Goto : *Phys. Fluids*, **14**, (2002), p.352.
- [4] P. Contatntin, I. Procaccia and K.R. Sreenivassan : *Phys. Rev. Lett*, **67**(1991)p.1739
- [5] “Mixing : Chaos and Turbulence” H.Chaté, E. illermaux, and J.-M. Chomaz 編, NATO ASI Series B: Vol.373(1999) Kluwer
- [6] H.J.Catrakis and P.E. Dimotakis: 同上, p.145, とその引用文献
- [7] S. Toh and M. Iima : *Phys. Rev. E*, **61** No.3, (2000) p.2626.
- [8] A. Monin and A. Yaglom: *Statistical Fluid Mechanics*(MIT Press, Cambridge, Mass., 1975), Vol.2.